求解箭形线性方程组的一类追赶法

叶志翔，蔡　静
（湖州师范学院 理学院，浙江 湖州 313000）

摘　要:研究系数矩阵为箭形矩阵的线性方程组的求解问题.利用矩阵分解技术,结合箭形矩阵的结构特点,建立了箭形线性方程组的一类追赶法.经运算量分析表明,此方法的运算量是线性量级,数值算例说明该方法实际可行.

关键词:箭形矩阵；矩阵分解；追赶法
中图分类号:O241.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1009-1734(2019)02-0011-05

0　引言

箭形矩阵作为一种特殊的稀疏矩阵,在现代控制理论中有着广泛的应用[1,2],近年来不少研究者开始关注它的性质与相关计算问题[3-8].在涉及到关于网络、差分方程的求解、自动化理论以及逻辑电路等一些实际问题时,常常会把问题归结到系数矩阵为箭形矩阵的线性代数方程组(简称箭形线性方程组)的求解[9,10].因此,研究箭形线性方程组的有效解法是非常必要的.追赶法是求解三对角型线性方程组的一类常用方法,因其计算公式简单,运算量和存储量小,近年来被先后推广应用于循环三对角、五对角、反五对角与拟反五对角线性方程组、七对角线性方程组等对角型线性方程组[11-14].本文利用矩阵分解,结合箭形矩阵的结构特点,构建箭形线性方程组的追赶法.

1　预备知识

定义 1　称如下结构的 n 阶实矩阵为箭形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ e_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ e_3 & b_3 & a_3 & c_3 & & & \\ e_4 & & b_4 & a_4 & c_4 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ e_{n-1} & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ e_n & & & & & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

本文假设箭形矩阵 A 满足如下条件(*):

(1) $b_i \neq 0(i=3,4,\cdots,n),c_i \neq 0(i=2,3,\cdots,n),e_i,f_i \neq 0(i=2,3,\cdots,n)$;

(2) $|a_1| > \sum_{i=2}^{n} |f_i|,|a_2| > |e_2|+|c_2|,|a_i| > |b_i|+|c_i|+|e_i|,|a_n| > |e_n|+|b_n|$.

引理 1[15]　若矩阵 $A=(a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 严格对角占优,则 $a_{ii} \neq 0$ 且 A 为非奇异矩阵.

引理 2[15]　设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的各阶顺序主子式不等于零,则存在唯一的分解 $A=MN$,其中 M 为上

收稿日期:2018-10-25
基金项目:中国博士后科学基金面上资助项目(2016M601688).
通信作者:蔡静,副教授,研究方向:数值代数.E-mail:caijing@zjhu.edu.cn

三角矩阵，N 为单位下三角矩阵.

推论1 若箭形矩阵 A 满足条件（$*$），则 A 非奇异且存在唯一的分解 $A=MN$，其中 M 为上三角矩阵，N 为单位下三角矩阵.

证明 若箭形矩阵 A 满足条件（$*$），则其各阶顺序主子阵仍满足条件（$*$）.根据引理1和引理2，A 为非奇异矩阵，且 A 的各阶顺序主子式均不等于零.从而存在唯一的分解 $A=MN$，其中 M 为上三角矩阵，N 为单位下三角矩阵.

2 箭形线性方程组的追赶法

考虑如下箭形线性代数方程组：

$$\begin{pmatrix} a_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ e_2 & a_2 & c_2 & & & & \\ e_3 & b_3 & a_3 & c_3 & & & \\ e_4 & & b_4 & a_4 & c_4 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ e_{n-1} & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ e_n & & & & & b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

简记为：$Ax=d$.

假设箭形矩阵 A 满足条件（$*$），根据推论1，可实现矩阵分解 $A=MN$.分解形式为：

$$A=\begin{pmatrix} l_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \cdots & r_{n-1} & r_n \\ & l_2 & m_2 & & & & \\ & & l_3 & m_3 & & & \\ & & & l_4 & m_4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & l_{n-1} & m_{n-1} \\ & & & & & & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ t_2 & 1 & & & & & \\ t_3 & s_3 & 1 & & & & \\ t_4 & & s_4 & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ t_{n-1} & & & & s_{n-1} & 1 & \\ t_n & & & & & s_n & 1 \end{pmatrix} = MN. \tag{2}$$

利用矩阵乘法，

$$A=\begin{pmatrix} l_1+\sum\limits_{i=2}^{n} r_i t_i & r_2+r_3s_3 & r_3+r_4s_4 & r_4+r_5s_5 & \cdots & r_{n-1}+r_ns_n & r_n \\ l_2t_2+m_2t_3 & l_2+m_2s_3 & m_2 & & & & \\ l_3t_3+m_3t_4 & l_3s_3 & l_3+m_3s_4 & m_3 & & & \\ l_4t_4+m_4t_5 & & l_4s_4 & l_4+m_4s_5 & m_4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ l_{n-1}t_{n-1}+m_{n-1}t_n & & & & l_{n-1}s_{n-1} & l_{n-1}+m_{n-1}s_n & m_{n-1} \\ l_nt_n & & & & & l_ns_n & l_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

比较(3)式两边元素，可得：

$$\begin{cases} l_n=a_n, r_n=f_n, s_n=b_n/a_n, t_n=e_n/a_n, \\ m_i=c_i, l_i=a_i-c_is_{i+1}, s_i=b_i/l_i\,(i=n-1,n-2,\cdots,2), \\ t_i=(e_i-c_it_{i+1})/l_i, r_i=f_i-r_{i+1}s_{i+1}\,(i=n-1,n-2,\cdots,2), \\ l_1=a_1-\sum\limits_{i=2}^{n} r_it_i. \end{cases} \tag{4}$$

从而可将求解方程组 $Ax=f$ 化为依次求解 $\begin{cases} My=d, \\ Ux=y. \end{cases}$ 具体算法如下：

第一步：获得 A 的三角分解 $A=MN$，形如(2)式，元素计算公式为(4)式.

第二步：解方程组 $My=d$，即“追”的过程.

解方程组：

$$\begin{pmatrix} l_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \cdots & r_{n-1} & r_n \\ & l_2 & m_2 & & & & \\ & & l_3 & m_3 & & & \\ & & & l_4 & m_4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & l_{n-1} & m_{n-1} \\ & & & & & & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

得其解为：

$$\begin{cases} y_n = d_n / l_n, \\ y_i = (d_i - m_i y_{i+1}) / l_i \ (i = n-1, n-2, \cdots, 2), \\ y_1 = (d_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} r_i y_i) / l_1. \end{cases} \tag{5}$$

第三步：解方程组 $Nx=y$，即“赶”的过程.

解方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ t_2 & 1 & & & & & \\ t_3 & s_3 & 1 & & & & \\ t_4 & & s_4 & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ t_{n-1} & & & & s_{n-1} & 1 & \\ t_n & & & & & s_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

得其解为：

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2 - t_2 x_1, \\ x_{i+1} = y_{i+1} - t_{i+1} x_1 - s_{i+1} x_i \ (i = 2, 3, \cdots, n-1). \end{cases} \tag{6}$$

上述算法即为求解箭形线性方程组的追赶法.用追赶法求解 n 阶箭形线性方程组，矩阵分解、“追”和“赶”的过程分别需要 $6n-10$、$3n-3$、$2n-3$ 次乘、除法，合计只需 $(11n-16)$ 次乘除法，而大家熟知的高斯消元法的运算量是 $(n^3/3+n^2-n/3)$.由此可见，当 n 较大时，追赶法的运算量比高斯消元法少很多.

3　数值算例

例 1　用追赶法求解如下箭形线性代数方程组：$Ax=d$.其中：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & & & 1 & 2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解　第一步：系数矩阵 A 实现三角分解，设

$$A=\begin{pmatrix} l_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ & l_2 & m_2 & & & \\ & & l_3 & m_3 & & \\ & & & l_4 & m_4 & \\ & & & & l_5 & m_5 \\ & & & & & l_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ t_2 & 1 & & & & \\ t_3 & s_3 & 1 & & & \\ t_4 & & s_4 & 1 & & \\ t_5 & & & s_5 & 1 & \\ t_6 & & & & s_6 & 1 \end{pmatrix}.$$

根据(4)式得：

$$\begin{cases} l_6=a_6=2, r_6=f_6=1, s_6=b_6/a_6=1/2, t_6=e_6/a_6=1/2, \\ m_5=c_5=1, l_5=a_5-c_5s_6=3/2, r_5=f_5-s_6r_6=1/2, s_5=b_5/l_5=2/3, t_5=(e_5-c_5t_6)/l_5=1/3, \\ m_4=c_4=1, l_4=a_4-c_4s_5=4/3, r_4=f_4-s_5r_5=2/3, s_4=b_4/l_4=3/4, t_4=(e_4-c_4t_5)/l_4=1/2, \\ m_3=c_5=1, l_3=a_3-c_3s_4=5/4, r_3=f_3-s_4r_4=1/2, s_3=b_3/l_3=4/5, t_3=(e_3-c_3t_4)/l_3=2/5, \\ m_2=c_2=1, l_2=a_2-c_2s_3=6/5, r_2=f_2-s_3r_3=3/5, s_2=b_2/l_2=5/6, t_2=(e_2-c_2t_3)/l_2=1/2, \\ l_1=a_1-\sum_{i=2}^{6}r_it_i=1/2. \end{cases}$$

第二步：解方程组：

$$\begin{pmatrix} l_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ & l_2 & m_2 & & & \\ & & l_3 & m_3 & & \\ & & & l_4 & m_4 & \\ & & & & l_5 & m_5 \\ & & & & & l_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix}.$$

得其解为：

$$\begin{cases} y_6=d_6/l_6=1, y_5=(d_5-m_5y_6)/l_5=0, y_4=(d_4-m_4y_5)/l_4=3/4, \\ y_3=(d_3-m_3y_4)/l_3=1/5, y_2=(d_2-m_2y_3)/l_2=2/3, y_1=(d_1-\sum_{i=2}^{6}r_iy_i)/l_1=0. \end{cases}$$

第三步：解方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ t_2 & 1 & & & & \\ t_3 & s_3 & 1 & & & \\ t_4 & & s_4 & 1 & & \\ t_5 & & & s_5 & 1 & \\ t_6 & & & & s_6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}.$$

得其解为：

$$\begin{cases} x_1=y_1=0, \\ x_2=y_2-t_2x_1=2/3, \\ x_3=y_3-t_3x_1-s_3x_2=-1/3, \\ x_4=y_4-t_4x_1-s_4x_3=1, \\ x_5=y_5-t_5x_1-s_5x_4=-2/3, \\ x_6=y_6-t_6x_1-s_6x_5=-4/3. \end{cases}$$

4 结 论

本文根据箭形矩阵的结构特点，利用矩阵分解技术，给出了求解箭形线性方程组的一类追赶法，并对

该方法的运算量进行分析.用此类追赶法求解箭形线性方程组的运算量是线性量级.数值试验表明，该算法是有效可行的.本文中的算法适用于系数矩阵 A 严格对角占优的情形，此时系数矩阵 A 为非奇异矩阵，且 A 的各阶顺序主子式均不等于零.从而方程组(1) 存在唯一解，且追赶法中的分解式(2) 存在且唯一.若系数矩阵仅为对角占优，则方程组无解或有无穷解，此时可以考虑对方程组进行预处理，再应用本文的算法.相应的预处理矩阵有待进一步研究.

参考文献：

[1] 赵维兴，孙斌，刘明波.多区域互联系统几种无功优化分解原太原：协调算法的比较[J].电网技术，2009(14)：36-41.

[2] 雷英杰.基于振动系统的结构化矩阵的逆谱问题研究[D].太原：中北大学，2016：22-24.

[3] OLEARY D P，STEWART G W.Computing the eigenvalues and eigenvectors of symmetric arrowhead matrices[J].J Comput Phys，1990，90(2)：497-505.

[4] ZHA H.A two－way chasing scheme for reducing a symmetric arrowhead matrix to tridiagonal form[J].J Numer Algebra Appl，1992，1(1)：49-57.

[5] SCHAFER U.The feasibility of the interval gaussian agorithm for arrowhead matrices[J].Reliable Computing，2001，7(1)：59-62.

[6] 蔡静.实对称矩阵对角化的一种直接算法[J].湖州师范学院学报，2007，29(2)：123-125.

[7] 孟纯军，钟璨，胡锡炎.两类对称箭形矩阵的逆问题[J].湖南大学学报，2008，35(8)：82-84.

[8] 吴跃明，高鸿，张复兴.对称箭形矩阵最大最小特征对的逆特征值问题的一个有效算法[J].计算技术与自动化，2009，28(2)：73-76.

[9] YUAN Y.Generalized inverse eigenvalue problems for symmetric arrow－head matrices[J].Inter J Comput Math Scie，2010，4(6)：268-271.

[10] YUAN Y X.Least squares solutions of the matrix equations with the least norm for symmetric arrowhead matrices[J].Appl Math Comput，2014，226：719-724.

[11] 王礼广，蔡放，熊岳山.五对角线性方程组追赶法[J].南华大学学报，2008(1)：1-4.

[12] 李文强，马民.求解循环三对角方程组的追赶法[J].科技导报，2009(14)：69-72.

[13] 叶新涛，张志.七对角线性方程组的追赶法[J].绍兴文理学院学报，2010(10)：1-5.

[14] 倪有义，蔡静.反五对角与拟反五对角方程组的追赶法[J].数学杂志，2014(1)：137-144.

[15] 令锋，傅守忠，陈树敏，等.数值计算方法[M].北京：国防工业出版社，2014.

Chase-after Method for Solving the System of Linear Equations with Arrowhead Coefficient Matrix

YE Zhixiang, CAI Jing

(School of Science, Huzhou University, Huzhou 313000, China)

Abstract: In this paper, the problem of solving the system of linear equations with arrowhead coefficient matrix is studied. By using the matrix decomposition technique and combining the structural characteristics of the arrowhead matrix, a class of chase-after method for the system of linear equations with arrowhead coefficient matrix is established. The calculation is shown to be linear. And the numerical example shows that the proposed method is practical.

Keywords: arrowhead matrix; matrix decomposition; chase-after method

[责任编辑　吴志慧]